ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6η ΔΕΚΑΔΑ

51.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & \text{αν } x>0 \\ 0\quad, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

iii) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

iv) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0(-\infty) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$

ii)

Για $x > 0$ είναι $f'(x) = 1 + \ln x$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1+\ln x = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1}$

Πρόσημο της f ′ και μονοτονία της f

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f ′	‖	−	0	+	
f	0	↘	|	↗	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = e^{-1}$, το $f(e^{-1}) = -e^{-1}$

Επειδή δε η f είναι συνεχής στο $x = 0$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

για $x = 0$ το $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το

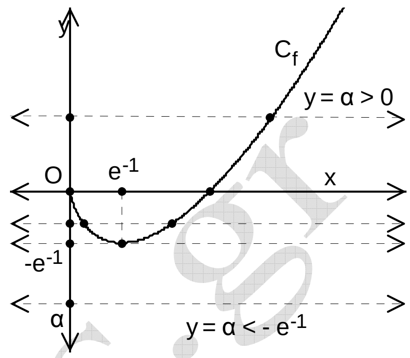
$$f(A) = [-e^{-1}, 0] \cup [-e^{-1}, +\infty) = [-e^{-1}, +\infty)$$

iii)

Για $x > 0$, η εξίσωση γράφεται : $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$

$\boxed{\text{Προσαρμογή της εξίσωσης στην f}}$ $\qquad x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

Πρόχειρο σχήμα



- Όταν $\alpha < -e^{-1}$, η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχει κοινό σημείο με τη C_f, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη
- Όταν $\alpha = -e^{-1}$, η ευθεία $y = \alpha$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο (επαφής) θετικής τετμημένης με τη C_f, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία μόνο θετική λύση.
- Όταν $-e^{-1} < \alpha < 0$, η ευθεία $y = \alpha$ έχει δύο κοινά σημεία θετικής τετμημένης με τη C_f, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δύο θετικές λύσεις.
- Όταν $\alpha = 0$, η ευθεία $y = \alpha = 0$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο θετικής τετμημένης με τη C_f, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία μόνο θετική λύση.
- Όταν $\alpha > 0$, η ευθεία $y = \alpha$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο θετικής τετμημένης με τη C_f, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία μόνο θετική λύση.

iv)
Για $x > 0$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[x,\ x+1]$.

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x,\ x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Για σχέση μεταξύ των f ΄ και f υποψιαζόμαστε Θ. Μ. Τ

Όμως $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

$$\xi \in (x,\ x+1) \Rightarrow \xi < x+1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x+1) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

52.

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε

$$2f(x^2) - f^2(x) \geq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

i) Υπάρχει $x_o \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_o) = 0$

ii) $f'(0) = f'(1) = 0$

iii) Η f έχει δύο τουλάχιστον πιθανά σημεία καμπής στο διάστημα (0, 1)

Προτεινόμενη λύση

i)

Η υπόθεση $2f(x^2) - f^2(x) \geq 1$ για $x = 0$ δίνει $2f(0) - f^2(0) \geq 1$

$f^2(0) - 2f(0) + 1 \leq 0$

Πονηρό τρικ

$(f(0) - 1)^2 \leq 0$

$f(0) - 1 = 0$

$f(0) = 1$

Ομοίως, για $x = 1$ δίνει …………………….. $f(1) = 1$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0, 1],

άρα υπάρχει $x_o \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $f'(x_o) = 0$

ii)

$2f(x^2) - f^2(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2f(x^2) - f^2(x) - 1 \geq 0$ **(1)**

Από ανισότητα σε ισότητα υποψιαζόμαστε Fermat

Θέτουμε $h(x) = 2f(x^2) - f^2(x) - 1$

Για $x = 0$ δίνει $h(0) = 2f(0^2) - f^2(0) - 1 = 2\cdot 1 - 1 - 1 = 0$

Η (1) γίνεται $h(x) \geq h(0)$ δηλαδή η h έχει ελάχιστο για $x = 0$.

Με βάση το θεώρημα του Fermat θα είναι $h'(0) = 0$

Αλλά $h'(x) = 2f'(x^2)(2x) - 2f(x)f'(x)$

Για $x = 0$ δίνει $h'(0) = 2f'(0)(2.\ 0) - 2f(0)f'(0) \Rightarrow$

$0 = 2f'(0)\cdot 0 - 2\cdot 1f'(0)$

$0 = 0 - 2f'(0)$

$f'(0) = 0$

Ομοίως …… .. $f'(1) = 0$

iii)

Προσαρμογή στο (ii)

Η f' είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$[0, x_o]$, $[x_o, 1]$ και $f'(0) = f'(x_o) = f'(1) = 0$

Άρα για την f' σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά ισχύει το θεώρημα Rolle,

οπότε θα υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_o)$ και $\xi_2 \in (x_o, 1)$ τέτοια ώστε

$f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$, επομένως η f έχει δύο πιθανά σημεία καμπής.

53.

Έστω z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \quad \text{και} \quad 2z_1 - \overline{z}_2 = 5 + 5i$$

i) Να βρείτε τους z_1 , z_2

ii) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|z-1-3i| \le \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |w-3-i| \le \sqrt{2} \quad \text{δείξτε ότι}$$

α) Υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί z και w έτσι ώστε να ισχύει $z = w$ και να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z-w|$

β) $|z|_{min} = |w|_{min} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$, $|z|_{max} = |w|_{max} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = \alpha + \beta i$ τότε $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 4i \\ 2z_1 - \overline{z}_2 = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+\alpha) + (y+\beta)i = 4 + 4i \\ (2x-\alpha) + (2y+\beta)i = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x + \alpha = 4 \text{ και } y + \beta = 4 \text{ και } 2x - \alpha = 5 \text{ και } 2y + \beta = 5$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 3$, $y = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$

Άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3i$

ii) α)

$|z-1-3\cdot i| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(1+3\cdot i)| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow$

ο γ.τ της εικόνας του z είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο $K(1, 3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

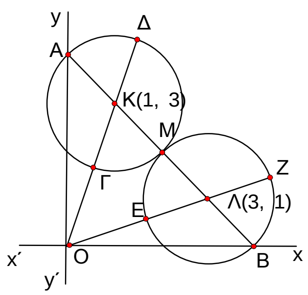
$|w-3-i| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow |w-(3+i)| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow$

ο γ.τ της εικόνας του w είναι ο κυκλικός δίσκος με κέντρο $\Lambda(3, 1)$ και ακτίνα $R = \sqrt{2}$

Επειδή $(K\Lambda) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \rho + R$,

οι δύο κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Μ.

Επομένως έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, οπότε υπάρχει ένας μόνο από τους z και ένας μόνο από τους w που να είναι οι μοναδικοί αριθμοί z και w ώστε $z = w$



Φέρνουμε τη διάκεντρο ΚΛ η οποία τέμνει τον κύκλο (K, ρ) σε σημείο Α και τον (Λ, R) σε σημείο Β.

Η ποσότητα $|z-w|$ εκφράζει την απόσταση οποιουδήποτε z από οποιονδήποτε w.

Η ποσότητα $|z-w|$ γίνεται μέγιστη όταν η εικόνα του z είναι το Α και η εικόνα του w είναι το Β.

Άρα $|z-w|_{max}$ = ΑΒ = 2ρ + 2R = $2\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ii) β)

Φέρνουμε την ΟΚ που τέμνει τον κύκλο (Κ, ρ) στα Γ, Δ

και την ΟΛ που τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στα Ε, Ζ

Τότε $|z|_{min}$ = (ΟΓ) = (ΟΚ) − ρ = $\sqrt{3^2+1}-\sqrt{2} = \sqrt{10}-\sqrt{2}$

$|z|_{max}$ = (ΟΔ) = (ΟΚ) + ρ = $\sqrt{3^2+1}+\sqrt{2} = \sqrt{10}+\sqrt{2}$

Ομοίως $|w|_{min}$ = (ΟΕ) $=\sqrt{10}-\sqrt{2}$

$|w|_{max}$ = (ΟΖ) $=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

54.

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, -2)$ και η εφαπτομένη σ' αυτό είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y = 0$, να βρείτε τους τύπους των f και g

ii) Αν $f(x) = (x-2)\,e^x$ και $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

Προτεινόμενη λύση

i)

$g(x) = f(x)e^{-x} \;\Rightarrow\; f(x) = g(x)e^x$

$f'(x) = g'(x)\,e^x + g(x)e^x$ και

$f''(x) = g''(x)\,e^x + g'(x)e^x + g'(x)e^x + g(x)e^x$

$= g''(x)\,e^x + 2g'(x)e^x + g(x)e^x$

Η υπόθεση $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ γίνεται

$$g''(x)\,e^x + 2g'(x)e^x + g(x)e^x - 2\big(g'(x)\,e^x - g(x)e^x\big) + g(x)e^x = 0$$

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) - 2g'(x) - 2g(x) + g(x) = 0$$

$g''(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$g'(x) = c$ στο $\mathbb{R}$ **(1)**

Από την υπόθεση $g(x) = f(x)e^{-x} \;\Rightarrow\; g'(x) = f'(x)\,e^{-x} - f(x)e^{-x}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}\; f'(x)\,e^{-x} - f(x)e^{-x} = c$ **(2)**

Για $x = 0$ η (2) δίνει $f'(0) - f(0) = c$ **(3)**

Από υποθέσεις είναι $f(0) = -2$ και $f'(0) = -1$

Οπότε η (3) $\Rightarrow$ $-1 + 2 = c \;\Rightarrow\; c = 1$

Επομένως η (1) γίνεται $g'(x) = 1 \;\Rightarrow\; g(x) = x + c_1$ στο $\mathbb{R}$

$f(x)e^{-x} = x + c_1$ στο $\mathbb{R}$ **(4)**

Για $x = 0$ η (4) δίνει $f(0) = c_1$

Αλλά $f(0) = -2$, άρα $c_1 = -2$

Η (4) $\Rightarrow$ $f(x)e^{-x} = x - 2$

$f(x) = (x-2)\,e^x$, οπότε $g(x) = x - 2$

ii)

Μας ενδιαφέρει η διαφορά $f(x)-g(x) = (x-2)\,e^x-(x-2)$

$= (x-2)(\,e^x-1)$ προφανώς συνεχής

Ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ (Τομές των C_f, C_g)

Δηλαδή της εξίσωσης $f(x)-g(x) = 0$

$(x-2)\,e^x-(x-2) = 0$

$(x-2)(\,e^x-1) = 0$

$x = 2$ ή $x = 0$

Είναι $E = \int_0^2 |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^2 |(x-2)(e^x-1)|\,dx$ **(5)**

Επειδή $0 \le x \le 2 \Rightarrow e^x \ge 1$ και $x-2 \le 0$

$e^x-1 \ge 0$ και $x-2 \le 0$

$$(5) \Rightarrow E = \int_0^2 -(x-2)(e^x-1)dx = -\int_0^2 (x-2)(e^x-x)'dx =$$

$$= \left[-(x-2)(e^x-x)\right]_0^2 + \int_0^2 (e^x-x)dx$$

$$= \left[-(x-2)(e^x-x)\right]_0^2 + \left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \ \ldots\ldots..$$

55.

i) Δείξτε ότι $x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) Δείξτε ότι $\frac{2x}{\pi} \le \eta\mu x \le x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iv) Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{4}{5}$ έχει μία μόνο λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Ανίσωση από μονοτονία

Έστω $g(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ συνεχής και παραγωγίσιμη

$g\,'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Οπότε, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, δηλαδή $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(0) > g(x) > g(\frac{\pi}{2})$

$0 > g(x) > -1$

$x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$

ii)

Η $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$f\,'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Και επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, θα είναι $f(A) = \left[\frac{2}{\pi}, 1\right)$

iii)

- Για $x = 0$, η αποδεικτέα σχέση $\frac{2x}{\pi} \le \eta\mu x \le x$ γίνεται

  $0 \le 0 \le 0$ που ισχύει ισχύει με το =

- Για $x \ne 0$, η αποδεικτέα σχέση $\frac{2x}{\pi} \le \eta\mu x \le x$ γίνεται

  $\frac{2}{\pi} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le 1$ που αποδείχθηκε στο (ii)

iv)

Επειδή $f(A) = \left[\frac{2}{\pi}, 1\right)$ και $\frac{4}{5} \in \left[\frac{2}{\pi}, 1\right)$, η εξίσωση $f(x) = \frac{4}{5}$

δηλαδή η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{4}{5}$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι μοναδική αφού η συνάρτηση

$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

56.

Η τιμή P ενός προϊόντος σε χιλιάδες ευρώ , t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2 + \dfrac{25}{4}}$, $t \geq 0$

i) Να βρείτε την τιμή του προϊόντος την στιγμή εισαγωγής του στην αγορά .
ii) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
iii) Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.
iv) Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται , χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή εισαγωγής του στην αγορά.

Προτεινόμενη λύση

i)
Η τιμή του προϊόντος την στιγμή εισαγωγής του στην αγορά προκύπτει για t = 0

$P(0) = 4 + \dfrac{-6}{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{76}{25}$ χιλιάδες ευρώ .

ii)

Είναι $P'(t) = \dfrac{-t^2 + 12t + \dfrac{25}{4}}{\left(t^2 + \dfrac{25}{4}\right)^2}$

$P'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2 + 12t + \dfrac{25}{4} = 0$

$\Delta = 144 + 25 = 169, \qquad t = \dfrac{-12 \pm 13}{2(-1)} = \dfrac{25}{2}$ (αφού $t \geq 0$)

Πρόσημο της P΄ και μονοτονία της P

x	0		25/2		+∞
P΄		+	0	−	
P		↗	|	↘	

Η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{25}{2}\right]$,

που σημαίνει ότι σαυτό το χρονικό διάστημα η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνει.

iii)

Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη $\dfrac{25}{2} = 12{,}5$ μήνες από την εισαγωγή του στην αγορά .

iv)

Η συνάρτηση P είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{25}{2}, +\infty\right)$.

επομένως η τιμή του προϊόντος συνεχώς μειώνεται .

Αλλά $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(4+\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}}\right) = 4 + \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t-6}{t^2+\dfrac{25}{4}} = 4 + \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t} = 4 > \dfrac{76}{25}$

Επομένως η τιμή του προϊόντος δεν γίνεται ποτέ μικρότερη από την τιμή εισαγωγής του στην αγορά .

57.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = (x-2)\left(\sqrt{e^{2x}-2} + i\sqrt{2}\right)$ με $1 \le x \le 2$

και η συνάρτηση $f(x) = |z|$.

i) Να βρείτε εκείνον τον z που έχει το μεγαλύτερο μέτρο

ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

iii) Να δείξτε ότι η C_f και η ευθεία $y = x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο διάστημα $(1, 2)$

iv) Γνωρίζοντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το $\int_1^e f^{-1}(x)dx$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|z| = |x-2|\sqrt{(\sqrt{e^{2x}-2})^2 + \sqrt{2}^2} = |x-2|\sqrt{e^{2x}} = e^x(2-x)\text{, αφού } x-2 \le 0$$

Άρα $f(x) = e^x(2-x)$

η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με

Είναι $f'(x) = e^x(1-x) < 0$ στο $(1, 2)$ $\Rightarrow$ f γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	1 2
f'	−
f	↘

Η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1) = e$

Άρα ο z με το μεγαλύτερο μέτρο είναι αυτός που προκύπτει για $x = 1$,

δηλαδή ο $z_1 = -\sqrt{e^2-2} - \sqrt{2}\cdot i$

ii)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$, είναι '1-1' άρα αντιστρέψιμη

iii)

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

Έστω η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - x = e^x(2-x) - x$

Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ σαν πράξεις συνεχών .

$g(1) = e - 1 > 0$ και $g(2) = -2 < 0$ οπότε

με βάση το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε $g(\xi) = 0$

$f(\xi) - \xi = 0$

$f(\xi) = \xi$

iv)

Έστω $I = \int_0^e f^{-1}(x)dx$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, οπότε $dx = f'(u)du$ και

Όταν x = 0 τότε $u = f^{-1}(0) = f^{-1}(f(2)) = 2$

Όταν x = e τότε $u = f^{-1}(e) = f^{-1}(f(1)) = 1$

Άρα $I = \int_0^e f^{-1}(x)dx = \int_2^1 uf'(u)du$

$$= \int_2^1 u(1-u)e^u du$$

$$= \int_2^1 (u-u^2)e^u du$$

$$= \int_2^1 (u-u^2)\left(e^u\right)' du$$

$$= \left[(u-u^2)e^u\right]_2^1 - \int_2^1 (1-u)e^u du$$

$$= \left[(u-u^2)e^u\right]_2^1 - \int_2^1 (1-u)\left(e^u\right)' du$$

$$= \left[(u-u^2)e^u\right]_2^1 - \left[(1-u)e^u\right]_2^1 + \int_2^1 -e^u du$$

$$= \left[(u-u^2)e^u\right]_2^1 - \left[(1-u)e^u\right]_2^1 + \left[-e^u\right]_2^1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

58.

Έστω η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2011+|\ln(x-1)|$.

i) Αν c πραγματικός με $c>2011$ και η ευθεία $y=c$ τέμνει τη C_f στα σημεία A και B, δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι κάθετες.

ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$ και $x=e$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Τετμημένες των A, B : $f(x)=c \Leftrightarrow$

$$2011+|\ln(x-1)|=c$$
$$|\ln(x-1)|=c-2011$$
$$\ln(x-1)=c-2011 \quad ή \quad \ln(x-1)=2011-c$$
$$x-1=e^{c-2011} \quad ή \quad x-1=e^{2011-c}$$
$$x=1+e^{c-2011} \quad ή \quad x=1+e^{2011-c}$$

Για τον τύπο της συνάρτησης : Όταν $\ln(x-1)<0$

$$\ln(x-1)<\ln 1$$
$$x-1<1$$
$$x<2 \quad τότε \quad f(x)=2011+\ln(x-1)$$

Όταν $x\geq 2$ τότε $f(x)=2011-\ln(x-1)$

Άρα $f(x)=\begin{cases}2011+\ln(x-1)\,, & αν\ \ x\geq 2\\ 2011-\ln(x-1)\,, & αν\ \ 1<x<2\end{cases}$

f είναι συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ και $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}\,, & αν\ \ x>2\\ -\dfrac{1}{x-1}\,, & αν\ 1<x<2\end{cases}$

$$c>2011 \Rightarrow c-2011>0$$
$$e^{c-2011}>e^0$$
$$e^{c-2011}>1$$
$$1+e^{c-2011}>2 \quad άρα \quad f'(1+e^{c-2011})=\frac{1}{1+e^{c-2011}-1}=\frac{1}{e^{c-2011}}$$

και ομοίως $$f'(1+e^{2011-c})=-\frac{1}{1+e^{2011-c}-1}=-\frac{1}{e^{2011-c}}$$

Είναι λοιπόν $f'(1+e^{c-2011})\cdot f'(1+e^{2011-c}) = \frac{1}{e^{c-2011}}\cdot\left(-\frac{1}{e^{2011-c}}\right) = -1$,

οπότε οι εφαπτόμενες στα A και B είναι κάθετες .

ii)

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	1 2 +∞
f'	− ‖ +
f	↘ | ↗

$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2}<0, & \text{αν } x>2 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2}>0\ , & \text{αν } 1<x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ κοίλη στο } [2,\ +\infty) \\ f \text{ κυρτή στο } (1,\ 2] \end{cases}$$

iii)

Για κάθε $x\in[2,\ e]$ είναι $f(x) = 2011+\ln(x-1) > 0$.

Οπότε $E = \int_2^e \left(2011+\ln(x-1)\right)dx = \int_2^e 2011dx + \int_2^e \ln(x-1)dx$

$$= 2011(e-2) + \int_2^e x'\ln(x-1)dx$$

$$= 2011(e-2) + \left[x\ln(x-1)\right]_2^e - \int_2^e \frac{x}{x-1}dx$$

$$= 2011(e-2) + \left[x\ln(x-1)\right]_2^e - \int_2^e \frac{x-1+1}{x-1}dx$$

$$= 2011(e-2) + \left[x\ln(x-1)\right]_2^e - \int_2^e \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= 2011(e-2) + \left[x\ln(x-1)\right]_2^e - \left[x+\ln(x-1)\right]_2^e \ ...$$

59.

Έστω $f(x) = -x^2 + (\alpha + 1)x - \alpha$, όπου $\alpha > 1$.

i) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f και στη συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία κινούνται τα σημεία των μεγίστων της f.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

iii) Το σημείο $A(\alpha, 0)$ κινείται στον άξονα $x'x$ με ταχύτητα $\upsilon = 2$ cm/s. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 3$, να βρείτε

α) Το ρυθμό μεταβολής της μέγιστης τιμής της f.

β) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $f'(x) = -2x + \alpha + 1$

$f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{\alpha+1}{2}$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$	$\dfrac{\alpha+1}{2}$	$+\infty$
f'	+	‖	−
f	↗	|	↘

$$f_{max} = f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = -\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 + (\alpha+1)\frac{\alpha+1}{2} - \alpha$$

$$= -\frac{(\alpha+1)^2}{4} + \frac{(\alpha+1)^2}{2} - \alpha$$

$$= \frac{(\alpha+1)^2}{4} - \frac{4\alpha}{4}$$

$$= \frac{\alpha^2+2\alpha+1-4\alpha}{4} = \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{4} = \frac{(\alpha-1)^2}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Έστω (x_o, y_o) οι συντεταγμένες των μεγίστων της f.

Απαλοιφή του α

Τότε $x_o = \dfrac{\alpha+1}{2}$ και $y_o = \dfrac{(\alpha-1)^2}{4} \iff 2x_o = \alpha + 1$ και $4y_o = (\alpha-1)^2$

$2x_o - 2 = \alpha - 1$ και $4y_o = (\alpha-1)^2$

$\alpha - 1 = 2(x_o - 1)$ και $4y_o = 4(x_o - 1)^2$

$y_o = (x_o - 1)^2$

Επομένως το μέγιστο της συνάρτησης κινείται στην καμπύλη με εξίσωση

$$y = (x-1)^2 \quad \text{με} \quad x > 1$$

ii)

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + (\alpha + 1)x - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha \quad ή \quad x = 1$

Για κάθε $x \in [1, \alpha]$ είναι $f(x) \geq 0$, άρα $E = \int_1^{\alpha} (-x^2 + (\alpha+1)x - \alpha)dx$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + (\alpha+1)\frac{x^2}{2} - \alpha x \right]_1^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1}{6} = \frac{(\alpha-1)^3}{6}$$

iii)

Δίνεται $\alpha'(t) = 2$

Στην (1), όπου α θέτουμε α(t). Έτσι ορίζεται συνάρτηση $M(t) = \frac{\left(\alpha(t) - 1\right)^2}{4}$

που εκφράζει τη μέγιστη τιμή της f συναρτήσει το χρόνου t .

$M'(t) = \frac{2\left(\alpha(t) - 1\right)\alpha'(t)}{4}$

Έστω t_o η χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha(t_o) = 3$

Οπότε $M'(t_o) = \frac{2\left(\alpha(t_0) - 1\right)\alpha'(t_0)}{4} = \frac{2(3-1)2}{4} = 2$

Ομοίως βρίσκουμε $E'(t) = \frac{3(\alpha(t)-1)^2\alpha'(t)}{6}$

$$E'(t_o) = \frac{3(\alpha(t_0)-1)^2\alpha'(t_0)}{6} = \frac{3(3-1)^2 2}{6} = 4$$

60.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο . Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τον τύπο

$f(t) = \dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$ όπου α, β σταθερές θετικές και ο χρόνος μετράται σε ώρες .

Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου .

i) Να βρείτε τις σταθερές α και β .

ii) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον 12 μονάδες , να βρείτε το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο το φάρμακο δρα αποτελεσματικά .

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f\,'(t) = \dfrac{-\dfrac{\alpha t^2}{\beta^2}+\alpha}{\left(1+\dfrac{t^2}{\beta^2}\right)^2}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $t = 6$ του $[0, +\infty)$, σύμφωνα με το θεώρημα του fermat θα ισχύει

$f\,'(6) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{36\alpha}{\beta^2}+\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta^2-36) = 0 \Leftrightarrow \beta = 6$

Ακόμα από υπόθεση ισχύει $f(6) = 15 \Leftrightarrow \dfrac{6\alpha}{1+\dfrac{36}{\beta^2}} = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5$

ii)

Για $\alpha = 5$ και $\beta = 6$ έχουμε $f(t) = \dfrac{5t}{1+\left(\dfrac{t}{6}\right)^2}$

Πρέπει και αρκεί $f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \dfrac{5t}{1+\left(\dfrac{t}{6}\right)^2} \geq 12$

$t^2-15t+36 \leq 0$

$3 \leq t \leq 12$

Το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από το πέρας της $3^{ης}$ ώρας μέχρι το πέρας της $11^{ης}$